

# DASAR LAUT SINUSOIDAL SEBAGAI REFLEKTOR GELOMBANG

Viska Noviantri

Jurusan Matematika dan Statistik, Fakultas Sains dan Teknologi, Binus University  
Jln. K.H. Syahdan No. 9, Palmerah, Jakarta Barat 11480  
viskanoviantri@binus.ac.id, viskanoviantri@yahoo.com

## ABSTRACT

*This article discusses about the influence of sinusoidal sandbars towards the amplitude of incident wave. sinusoidal sandbars may lead to Bragg resonance. Basically, when a wave meets a different depth, it will scatter into a transmitted wave and a reflected wave. Bragg resonance happens when the wavelength of incident wave is twice of the wavelength of the periodic bottom disturbance. We apply the multi-scale asymptotic expansion to obtain the results. Eventually we find that a larger amplitude disturbance leads to larger reflected wave amplitude. This result explains that the sinusoidal sandbars indeed can reduce the amplitude of incident wave and protect a beach from large amplitude incident waves.*

**Keywords:** *Bragg resonance, multiple scale asymptotic expansion, sinusoidal sandbars.*

## ABSTRAK

*Paper ini akan membahas pengaruh dasar laut sinusoidal terhadap amplitudo gelombang datang. Pada dasarnya, ketika suatu gelombang melewati dasar tak rata, gelombang ini akan mengalami transmisi dan refleksi. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa dasar laut sinusoidal dapat menyebabkan terjadinya fenomena resonansi Bragg. Resonansi Bragg terjadi ketika panjang gelombang datang sebesar dua kali panjang gelombang dasar sinusoidal. Metode yang digunakan untuk mendapatkan hampiran solusinya adalah metode ekspansi asimtotik multi skala. Pada akhirnya diperoleh bahwa besar amplitudo gelombang yang direfleksikan berbanding lurus dengan amplitudo dasar sinusoidal. Hasil ini menunjukkan bahwa dasar sinusoidal dapat mereduksi amplitudo gelombang datang sehingga amplitudo gelombang transmisi cukup kecil. Dengan demikian, dasar sinusoidal dapat melindungi pantai dari amplitudo gelombang datang yang cukup besar.*

**Kata kunci:** *Resonansi Bragg, ekspansi asimtotik multi skala, dasar sinusoidal*

## PENDAHULUAN

Kerusakan pantai bukanlah suatu hal yang asing lagi bagi masyarakat. Banyak faktor yang dapat menyebabkan kerusakan pantai baik karena ulah manusia maupun karena aktivitas alam. Kerusakan pantai yang disebabkan oleh aktivitas alam sering kali terjadi akibat adanya terjangan gelombang air laut yang datang dengan amplitudo yang sangat besar.

Salah satu upaya yang telah dilakukan untuk mengurangi kerusakan pantai tersebut adalah dengan membuat tanggul sebagai pemecah gelombang yang sering ditemukan di sepanjang pesisir pantai (J.Yu, C.C Mei, 2000). Tanggul tersebut biasanya terdiri dari sejumlah balok yang kuat dan kokoh dengan ukuran tertentu. Jarak antar balok disesuaikan dengan kebutuhan. Balok tersebut berperan sebagai reflektor gelombang yang dapat mereduksi amplitudo gelombang air laut yang datang sehingga amplitudo gelombang yang ditransmisikan ke pantai bisa sekecil mungkin. Penanaman balok di pesisir pantai menyebabkan adanya gangguan bagi amplitudo gelombang air laut yang datang.

Dasar laut tak rata dapat terjadi secara alamiah dan bentuk dasar laut tak rata juga dapat memberikan gangguan bagi amplitudo gelombang air laut yang datang. Berdasarkan uraian inilah penulis tertarik untuk mempelajari tentang pengaruh dasar laut tak rata dalam meminimalkan amplitudo gelombang yang ditransmisikan ke pantai. Bentuk dasar laut tak rata yang akan dibahas adalah bentuk dasar laut sinusoidal.

Dasar laut sinusoidal dapat menyebabkan resonansi Bragg (C.C. Mei, 2004). Fenomena ini sering ditemui dalam cabang Fisika yaitu optik. Resonansi Bragg ini akan terjadi jika bilangan gelombang dasar sinusoidal sebesar dua kali bilangan gelombang air laut yang datang. Pada dasarnya, ketika suatu gelombang datang melewati dasar dengan kedalaman berbeda, perambatan gelombang tersebut akan terpecah menjadi dua bagian, yaitu gelombang transmisi dan gelombang refleksi. Bayangkan suatu gelombang datang dari suatu dasar rata kemudian merambat ke daerah dasar sinusoidal. Ketika melewati dasar sinusoidal ini, gelombang yang datang akan mengalami banyak sekali proses perpecahan menjadi gelombang transmisi dan gelombang refleksi (Hirose, 1985). Resonansi Bragg terjadi ketika daerah tersebut menyebabkan terjadinya interferensi gelombang refleksi sehingga amplitudo gelombang refleksi yang menjauhi pantai sangat besar dan amplitudo gelombang transmisi yang menuju ke pantai sangat kecil.

## METODE

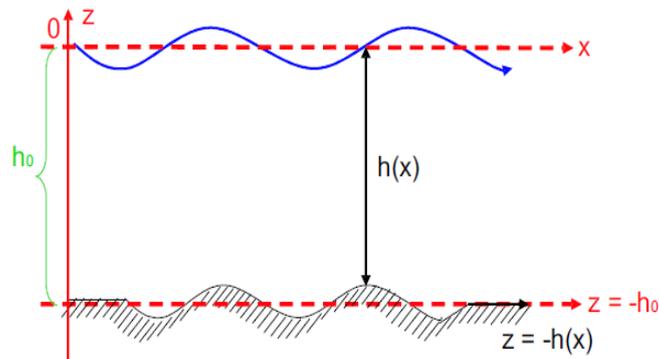
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif melalui studi literature mengenai gelombang beserta sifat-sifatnya, metode asimtotik multi skala, dsb. Namun hal ini ditunjang dengan memberikan hasil penelitian berupa solusi analitik dan numerik. Kesesuaian antara solusi analitik dan numerik dapat memberikan penjelasan yang lebih spesifik mengenai hasil penelitian yang diperoleh.

Solusi analitik dan numerik yang diperoleh merupakan hasil simulasi dari data-data yang digunakan. Data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dari percobaan laboratorium yang dilakukan oleh Heatershaw pada tahun 1982. Hasil percobaan laboratorium tersebut telah banyak digunakan oleh para peneliti di bidang ini. Data ini merupakan data percobaan mengenai perambatan gelombang air di atas dasar berbentuk sinusoidal. Data ini meliputi berbagai kombinasi nilai perbandingan antara amplitudo dasar laut sinusoidal dengan kedalaman air ketika dasar rata, panjang

dasar sinusoidal, bilangan gelombang datang dan bilangan gelombang dasar sinusoidal, dan amplitudo gelombang permukaan air yang datang.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Persamaan Gelombang untuk Dasar Sinusoidal



Gambar 1. Skema lapisan fluida pada dasar laut sinusoidal.

Dasar laut berbentuk sinusoidal adalah salah satu bentuk dasar laut tak rata yang berupa fungsi sinus atau cosinus. Dasar laut berbentuk sinusoidal ini biasanya terdiri dari beberapa gundukan (*bar*) bahkan ada yang terdiri dari berlusin-lusin bar. Amplitudo dari gundukan dapat mencapai ukuran meter.

Perhatikan Gambar 1. Misalkan domain pengamatan pada dasar sinusoidal ini adalah  $\{z | -h(x) \leq z \leq \eta(x, t)\}$ , dengan  $h$  adalah fungsi satu peubah yang merepresentasikan kedalaman air laut dan  $\eta$  adalah fungsi dua peubah yang merepresentasikan simpangan gelombang permukaan air laut dari keadaan setimbang.

Misalkan fungsi kedalaman air pada dasar laut sinusoidal adalah

$$h(\hat{x}) = h_0(1 + \varepsilon D \cos K\hat{x}), \quad (1)$$

dengan  $h_0$  menyatakan kedalaman air laut ketika dasar laut rata,  $h_0\varepsilon D$  menyatakan amplitudo gundukan dasar sinusoidal, dan  $K$  menyatakan bilangan gelombang dasar sinusoidal. Parameter  $\varepsilon D$  adalah parameter tak berdimensi yang menyatakan perbandingan antara amplitudo gundukan dasar sinusoidal dengan kedalaman air laut pada keadaan normal  $h_0$ , dengan  $\varepsilon$  suatu bilangan kecil.

Persamaan gerak gelombang untuk dasar sinusoidal yang akan digunakan adalah persamaan air dangkal (SWE) linier berikut:

$$\begin{cases} \hat{\eta}_t = -(\hat{h}u)_x \\ u_t = -g\hat{\eta}_x \end{cases} \quad (2)$$

dengan  $u(x, t)$  menyatakan komponen horizontal vektor kecepatan partikel fluida di permukaan.

Dari kedua persamaan pada (2),  $u(x, t)$  dapat dieliminasi dan untuk dasar sinusoidal dengan  $h(\hat{x})$  seperti pada (1), diperoleh persamaan gelombang sebagai berikut

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \eta(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}^2} = h_0 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ (1 + \varepsilon D \cos K \hat{x}) \frac{\partial \eta(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \right]. \quad (3)$$

dengan  $\eta(\hat{x}, \hat{t})$  menyatakan simpangan permukaan air laut dari keadaan setimbang. Perhatikan bahwa persamaan (3) memiliki parameter kecil  $\varepsilon$ . Selanjutnya hampiran solusi analitiknya akan dicari dengan menerapkan metode ekspansi asimtotik.

### Resonansi Bragg

Misalkan ekspansi asimtotik (Holmes, 1995) untuk  $\eta(\hat{x}, \hat{t})$  adalah

$$\eta(\hat{x}, \hat{t}) = \eta_0(\hat{x}, \hat{t}) + \varepsilon \eta_1(\hat{x}, \hat{t}) + \varepsilon^2 \eta_2(\hat{x}, \hat{t}) + \varepsilon^3 \eta_3(\hat{x}, \hat{t}) + \dots \quad (4)$$

Suku-suku berorde  $O(1)$  dari persamaan (3) yang telah diekspansikan adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \hat{t}^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \hat{x}^2} = 0 \quad (5)$$

Jika kita hanya memperhatikan gelombang monokromatik, persamaan diferensial (5) memiliki solusi d'Alembert (Strauss, 1992), yaitu:

$$\eta_0 = \frac{A}{2} e^{ik\hat{x} - i\omega\hat{t}} + \frac{A_*}{2} e^{-ik\hat{x} + i\omega\hat{t}}. \quad (6)$$

dimana  $\omega$  menyatakan frekuensi gelombang datang dan  $k$  menyatakan bilangan gelombang yang memenuhi hubungan  $\frac{\omega}{k} = c = \sqrt{gh_0}$ .

Sedangkan suku-suku berorde  $O(\varepsilon)$  dari persamaan (3) yang telah diekspansikan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} h_0 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \hat{x}^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \hat{t}^2} = & -\frac{h_0 D}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \frac{ikA}{2} e^{i(K+k)\hat{x} - i\omega\hat{t}} - \frac{ikA_*}{2} e^{i(K-k)\hat{x} + i\omega\hat{t}} \right. \\ & \left. + \frac{ikA}{2} e^{i(-K+k)\hat{x} - i\omega\hat{t}} - \frac{ikA_*}{2} e^{-i(K+k)\hat{x} + i\omega\hat{t}} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Jika  $K = 2k$ , maka suku-suku  $e^{i(K-k)\hat{x} + i\omega\hat{t}}$  dan  $e^{i(-K+k)\hat{x} - i\omega\hat{t}}$  pada persamaan (7) merupakan solusi homogen dari persamaan tersebut. Hal ini mengindikasikan akan terjadinya resonansi pada solusi  $\eta_1$ . Resonansi ini disebut resonansi Bragg.

Dalam kasus bilangan gelombang dasar laut sinusoidal hampir dua kali lipat bilangan gelombang permukaannya, maka  $K = 2k + \delta$  dengan  $\delta$  suatu bilangan kecil ( $\delta \ll k$ ). Solusi partikular (7) yang berkorespondensi dengan suku  $e^{i(K-k)\hat{x} + i\omega\hat{t}}$ , adalah

$$\eta_1 = \frac{E e^{i\phi_0} (1 - e^{i\delta\hat{x}})}{h_0 \delta (2k + \delta)}.$$

Perhatikan bahwa  $\eta_1 = O(1/\delta)$ . Jika  $\delta = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \eta_1 = O(1)$ . Ini berarti bahwa suku kedua pada ruas kanan persamaan (4) memberikan pengaruh yang signifikan terhadap suku pertama di ruas kanan persamaan (4) yaitu  $\eta_0(x, t)$ . Dengan demikian, (4) menjadi tidak berlaku lagi. Metode yang sesuai untuk mengatasi masalah ini adalah metode ekspansi asimtotik multi skala.

## Eksansi Asimtotik Multi Skala

Mula-mula akan diperkenalkan variabel “cepat” dan “lambat”, yang dapat dituliskan secara berturut - turut sebagai berikut

$$x = \hat{x} \quad \text{dan} \quad \bar{x} = \varepsilon \hat{x}. \quad (8)$$

$$t = \hat{t} \quad \text{dan} \quad \bar{t} = \varepsilon \hat{t}, \quad (9)$$

sehingga turunan parsialnya menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \bar{t}}. \quad (10)$$

Selanjutnya, misalkan

$$\eta(\hat{x}, \hat{t}) \equiv \eta(x, \bar{x}; t, \bar{t}) = \eta_0(x, \bar{x}; t, \bar{t}) + \varepsilon \eta_1(x, \bar{x}; t, \bar{t}) + \varepsilon^2 \eta_2(x, \bar{x}; t, \bar{t}) + \dots \quad (11)$$

substitusikan (10) dan (11) ke (3) sehingga diperoleh suku-suku berorde  $O(1)$  yaitu:

$$\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

yang memiliki solusi

$$\eta_0 = \frac{A(\bar{x}, \bar{t})}{2} e^{ikx - i\omega t} + c.c + \frac{B(\bar{x}, \bar{t})}{2} e^{-ikx - i\omega t} + c.c, \quad (13)$$

dengan c.c adalah konjugat kompleksnya. Perhatikan bahwa  $\frac{A(\bar{x}, \bar{t})}{2}$  dan  $\frac{B(\bar{x}, \bar{t})}{2}$  secara berturut-turut merupakan *envelope* bagi gelombang yang menjalar ke kanan dan ke kiri.

Untuk  $K = 2k$ , persamaan yang memiliki  $O(\varepsilon)$  adalah

$$\begin{aligned} h_0 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial A}{\partial \bar{t}} (-i\omega) e^{ikx - i\omega t} + c.c + \frac{\partial B}{\partial \bar{t}} (-i\omega) e^{-ikx - i\omega t} + c. \right] \\ &- h_0 \left[ \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} (ik) e^{ikx - i\omega t} + c.c + \frac{\partial B}{\partial \bar{x}} (-ik) e^{-ikx - i\omega t} + c.c \right] \\ &- \frac{h_0 D}{4} (k^2 B e^{ikx - i\omega t} + c.c + k^2 A e^{-ikx - i\omega t} + c.c \\ &- 3k^2 A e^{3ikx - i\omega t} + c.c - 3k^2 B e^{-3ikx - i\omega t} + c.c). \end{aligned} \quad (14)$$

Untuk menghindari resonansi yang tidak terbatas dan untuk menjamin adanya solusi bagi  $\eta_1$ , koefisien - koefisien  $e^{\pm i(kx - \omega t)}$  dan  $e^{\pm i(kx + \omega t)}$  pada ruas kanan (14) harus dibuat nol, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} + c \frac{\partial A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{ikcD}{4} B(\bar{x}, \bar{t}), \quad (15)$$

$$\frac{\partial B(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial B(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{ikcD}{4} A(\bar{x}, \bar{t}). \quad (16)$$

Melalui eliminasi dan manipulasi aljabar, persamaan (15) dan (16) dapat dituliskan menjadi persamaan-persamaan bagi  $A(x, t)$  dan  $B(x, t)$  yang saling terpisah. Persamaan untuk  $A(x, t)$  yaitu

$$\frac{\partial^2 A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} - c^2 \frac{\partial^2 A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + (\Omega_0)^2 A(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad (17)$$

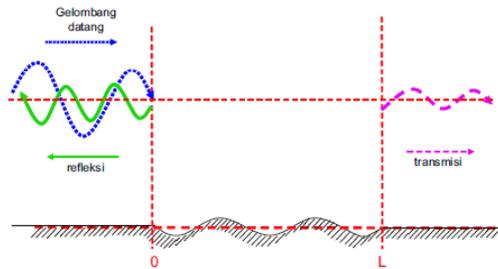
dengan

$$\Omega_0 \equiv \frac{kcD}{4} = \frac{\omega D}{4}, \quad (18)$$

yang memiliki dimensi (satuan) frekuensi. persamaan ini dikenal dengan nama persamaan Klein-Gordon. Persamaan untuk  $B(x, t)$  juga serupa dengan persamaan (17).

### Koefisien Transmisi dan Refleksi

Perhatikan Gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Gelombang datang, gelombang transmisi dan gelombang refleksi.

Bayangkan suatu gelombang monokromatik datang dari sebelah kiri dasar sinusoidal ( $x < 0$ ) kemudian merambat ke kanan dan melewati dasar sinusoidal yang panjangnya  $L$ . Ketika gelombang melewati dasar sinusoidal ( $0 < x < L$ ), akan terjadi banyak sekali perpecahan gelombang menjadi gelombang transmisi dan re<sup>o</sup>eksi. Asumsikan bahwa di sebelah kanan dasar sinusoidal terdapat pantai yang dapat menyerap semua gelombang sehingga setelah keluar dari daerah sinusoidal ( $x > L$ ), gelombang terus ditransmisikan ke kanan tanpa ada bagian yang direfleksikan ke kiri. Sekarang akan ditinjau mengenai pengaruh dasar sinusoidal terhadap amplitudo gelombang transmisi dan refleksi. Di sebelah kiri dasar laut sinusoidal, yaitu ketika  $x < 0$ , dasar laut rata sehingga gelombang yang merambat ke kanan tidak berubah bentuk, demikian juga dengan gelombang yang merambat ke kiri. Dengan demikian, pada daerah ini persamaan gerak bagi gelombang datang ( $A$ ) dan gelombang refleksi ( $B$ ) adalah persamaan transport. Di sebelah kanan dasar laut sinusoidal, yaitu ketika  $x > L$ ,  $B = 0$  karena pada daerah ini tidak ada lagi gelombang yang menjalar ke kiri, mengingat semua gelombang terserap di sisi kanan. Sedangkan di daerah dasar laut sinusoidal ( $0 < x < L$ ) berlaku persamaan Klein-Gordon. Dengan demikian, persamaan yang berlaku pada setiap daerah dapat dituliskan seperti pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1

Skema Persamaan  $A$  dan  $B$  Beserta Daerah Keberlakuannya.

Daerah	Persamaan
$\bar{x} < 0$	$\frac{\partial A}{\partial \bar{t}} + c \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} = 0, \frac{\partial B}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial B}{\partial \bar{x}} = 0.$
$0 < \bar{x} < \bar{L}$	$c \frac{\partial A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial A(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{ikcD}{4} B(\bar{x}, \bar{t}),$ $\frac{\partial B(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial B(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{ikcD}{4} A(\bar{x}, \bar{t}).$
$\bar{x} > \bar{L}$	$\frac{\partial A}{\partial \bar{t}} + c \frac{\partial A}{\partial \bar{x}} = 0, B = 0.$

Mula-mula, akan dibahas suatu kondisi ketika gelombang datang memiliki bilangan gelombang yang sedikit berbeda dengan gelombang datang penyebab resonansi. Gelombang datang dimisalkan memiliki bilangan gelombang  $k+\varepsilon\kappa$  dan frekuensi  $\omega+\varepsilon\Omega$ , dimana  $\Omega = O(\omega)$  dan  $\kappa = O(k)$ . Selain itu,  $\Omega$  dan  $\kappa$  juga harus memenuhi hubungan

$$\Omega = \kappa c. \quad (19)$$

Dengan demikian, gelombang monokromatik yang datang dimisalkan sebagai berikut

$$\zeta = A(\bar{x}, \bar{t}) e^{i\kappa x - i\omega t} \quad \text{dengan} \quad A(\bar{x}, \bar{t}) = A_0 e^{i\kappa(\bar{x} - c\bar{t})}, \quad (20)$$

dimana  $A_0$  menyatakan amplitudo gelombang datang.

Pada daerah dasar sinusoidal, misalkan solusinya berbentuk

$$\begin{aligned} A(\bar{x}, \bar{t}) &= A_0 T(\bar{x}) e^{-i\Omega \bar{t}}, \\ B(\bar{x}, \bar{t}) &= A_0 R(\bar{x}) e^{-i\Omega \bar{t}}, \end{aligned} \quad (21)$$

dengan  $T$  menyatakan koefisien transmisi dan  $R$  menyatakan koefisien refleksi. Ingat bahwa pada daerah ini,  $A$  dan  $B$  pada (21) harus memenuhi persamaan Klein-Gordon sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 T(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + \left( \frac{\Omega^2 - \Omega_0^2}{c^2} \right) T(\bar{x}) = 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < \bar{x} < \bar{L}, \quad (22)$$

dengan  $\Omega_0$  diberikan pada (18). Dengan mensyaratkan kekontinuan  $A(\bar{x}, \bar{t})$  dan  $B(\bar{x}, \bar{t})$  di  $x = 0$  dan di  $x = L$ , diperoleh syarat batas  $T(0) = 1$  dan  $R(L) = 0$ . Selain itu, substitusikan nilai  $A(\bar{x}, \bar{t})$  dan  $B(\bar{x}, \bar{t})$  yang diberikan oleh (21) ke persamaan (15) untuk memperoleh hubungan berikut:

$$-i\Omega T(\bar{x}) + c \frac{\partial T(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = i\Omega_0 R(\bar{x}). \quad (23)$$

Persamaan (23) digunakan untuk mencari syarat batas bagi  $T$  dan  $R$  di  $x = L$  yang akan digunakan dalam mencari solusi  $T(\bar{x})$  dan  $R(\bar{x})$ .

Perhatikan bahwa solusi (22) akan berbeda-beda bergantung pada tanda (positif atau negatif) dari  $\Omega^2 - \Omega_0^2$ , sehingga terdapat tiga kasus yaitu:

Kasus 1: *Subcritical detuning* terjadi jika  $0 < \Omega < \Omega_0$ .

Misalkan

$$Qc \equiv \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (24)$$

maka diperoleh

$$T(\bar{x}) = \frac{iQc \cosh Q(\bar{L} - \bar{x}) + \Omega \sinh Q(\bar{L} - \bar{x})}{iQc \cosh Q\bar{L} + \Omega \sinh Q\bar{L}}, \quad (25)$$

$$R(\bar{x}) = \frac{-\Omega_0 \sinh Q(\bar{L} - \bar{x})}{iQc \cosh Q\bar{L} + \Omega \sinh Q\bar{L}}. \quad (26)$$

Kasus 2: *Supercritical detuning* terjadi jika  $\Omega > \Omega_0$ .

Misalkan

$$Pc \equiv \sqrt{\Omega^2 - \Omega_0^2}, \quad (27)$$

maka akan diperoleh

$$T(\bar{x}) = \frac{Pc \cos P(\bar{L} - \bar{x}) - i\Omega \sin P(\bar{L} - \bar{x})}{Pc \cos P\bar{L} - i\Omega \sin P\bar{L}}, \quad (28)$$

$$R(\bar{x}) = \frac{i\Omega_0 \sin P(\bar{L} - \bar{x})}{Pc \cos P\bar{L} - i\Omega \sin P\bar{L}}. \quad (29)$$

Kasus 3: Resonansi sempurna terjadi ketika  $K = 2k$  dan  $\epsilon = 0$ . Jika  $\epsilon = 0$ , maka persamaan (25) dan (26) menjadi

$$T(\bar{x}) = \frac{A}{A_0} = \frac{\cosh \frac{\Omega_0(\bar{L} - \bar{x})}{c}}{\cosh \frac{\Omega_0\bar{L}}{c}}, \quad (30)$$

dan

$$R(\bar{x}) = \frac{B}{A_0} = \frac{i \sinh \frac{\Omega_0(\bar{L} - \bar{x})}{c}}{\cosh \frac{\Omega_0\bar{L}}{c}}. \quad (31)$$

## Hasil Simulasi

Mula-mula, fungsi  $T$  dan  $R$  pada (30) dan (31) akan dinyatakan sebagai fungsi dari variabel fisis  $\hat{x}$  dan  $L$ . Karena  $\bar{x} = \epsilon\hat{x}$  dan  $\bar{L} = \epsilon L$ , maka

$$\hat{T}(\hat{x}) \equiv T(\epsilon\hat{x}) = \frac{\cosh \frac{\epsilon k D(L - \hat{x})}{4}}{\cosh \frac{\epsilon k D L}{4}} \quad \text{dan} \quad \hat{R}(\hat{x}) \equiv R(\epsilon\hat{x}) = \frac{i \sinh \frac{\epsilon k D(L - \hat{x})}{4}}{\cosh \frac{\epsilon k D L}{4}}.$$

Guna mendapatkan persamaan (15) dan (16) dalam variabel real, terapkan transformasi  $\tilde{B} = iB$  sehingga diperoleh

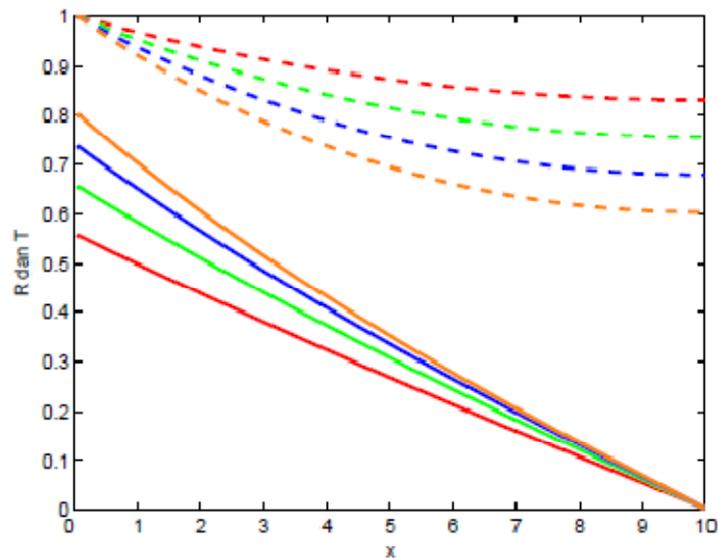
$$c \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{k c \epsilon D}{4} \tilde{B}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} - c \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} = \frac{-k c \epsilon D}{4} A. \quad (33)$$

Kemudian, persamaan (32) dan (33) didiskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga. Persamaan (32) merupakan persamaan transport bagi gelombang yang merambat ke kanan, jadi dipilih metode FTBS (*Forward Time Backward Space*), sedangkan untuk (33) digunakan metode FTFS (*Forward Time Forward Space*). Pilih  $\Delta x = c\Delta t$  agar kondisi kestabilan dan kekonsistenan terpenuhi. Selain itu dengan  $\Delta x = c\Delta t$ , metode beda hingga pada persamaan transport telah menghasilkan solusi eksak.

Untuk perhitungan, kita gunakan data sebagai berikut: Panjang dasar sinusoidal  $L = 10\text{m}$ ; bilangan gelombang monokromatik  $k = \pi$ ; dan bilangan gelombang dasar sinusoidal  $K = 2\pi$ . Dengan demikian, terjadi resonansi sempurna. Gambar 3 menunjukkan hasil simulasi dalam kasus resonansi sempurna untuk beberapa nilai perbandingan antara amplitudo dasar sinusoidal dengan kedalaman air laut pada keadaan normal ( $\epsilon D$ ). Kurva putus-putus dan kurva mulus secara berturut-turut merepresentasikan  $\hat{T}$  dan  $\hat{R}$ . Kurva  $\hat{T}$  dan  $\hat{R}$  diplot untuk  $\epsilon D = 0.08, 0.1, 0.12, \text{ dan } 0.14$ . Nilai

$\hat{T}(10)$  yang lebih besar adalah untuk  $\varepsilon D$  yang lebih kecil, sedangkan nilai  $\hat{R}(0)$  yang lebih besar adalah untuk  $\varepsilon D$  yang lebih besar.



Gambar 3. Grafik  $\hat{T}(\hat{x})$  dan  $\hat{R}(\hat{x})$  pada dasar laut sinusoidal untuk beberapa nilai  $\varepsilon D$ .

Simulasi secara analitik dan numerik menunjukkan hasil yang serupa baik secara kualitatif maupun secara kuantitatif. Selain itu, hasil simulasi juga menunjukkan kesesuaian dengan percobaan laboratorium yang dilakukan oleh Heathershaw. Kasus *subcritical detuning* dan *supercritical detuning* menunjukkan hasil yang sama secara kualitatif. Sedangkan secara kuantitatif, kasus *subcritical detuning* memberikan nilai-nilai yang sedikit lebih kecil dibandingkan resonansi sempurna dan kasus *supercritical detuning* memberikan nilai-nilai yang sedikit lebih besar dibandingkan resonansi sempurna. Hal ini menunjukkan bahwa resonansi Bragg merupakan fenomena yang stabil sehingga dapat diamati secara alami.

Gelombang yang datang dengan amplitudo  $A_0$ , akan terpecah menjadi gelombang transmisi dan refleksi. Amplitudo gelombang refleksi di sebelah kiri dasar sinusoidal adalah  $\hat{R}(0)$ , gelombang transmisi di sebelah kanan dasar sinusoidal adalah  $\hat{T}(10)$ . Selain itu, dapat dibuktikan bahwa  $\hat{R}(0)$  dan  $\hat{T}(10)$  memenuhi hukum kekekalan energi yaitu

$$[R(0)]^2 + [T(L)]^2 = 1. \quad (34)$$

## PENUTUP

Dasar laut sinusoidal yang memiliki bilangan gelombang sebesar dua kali lipat bilangan gelombang yang datang akan menyebabkan terjadinya fenomena resonansi Bragg. Fenomena serupa juga akan terjadi jika bilangan gelombang dasar sinusoidal mendekati dua kali lipat bilangan gelombang yang datang ( $K = 2k + \delta$ ). Suatu gelombang yang melewati dasar laut sinusoidal akan mengalami banyak sekali proses pemecahan gelombang menjadi gelombang transmisi dan refleksi.

Besarnya amplitudo gelombang transmisi dan gelombang refleksi yang dihasilkan, sangat dipengaruhi oleh besarnya amplitudo dasar sinusoidal.

Untuk kasus resonansi sempurna, baik secara analitik ataupun numerik, besarnya amplitudo dasar sinusoidal berbanding lurus dengan amplitudo gelombang yang direfleksikan. Hasil ini menunjukkan bahwa dasar laut sinusoidal dapat mereduksi amplitudo gelombang datang sehingga amplitudo gelombang yang ditransmisikan menjadi cukup kecil. Hasil yang serupa juga diperoleh untuk kasus *subcritical detuning* dan kasus *supercritical detuning*. Walaupun demikian, besarnya amplitudo gelombang refleksi untuk kasus *subcritical detuning* selalu lebih kecil atau sama dengan amplitudo gelombang refleksi pada kasus resonansi sempurna. Sedangkan untuk kasus *supercritical detuning*, besarnya amplitudo gelombang refleksi selalu lebih besar atau sama dengan amplitudo gelombang refleksi pada kasus resonansi sempurna.

## DAFTAR PUSTAKA

- Hirose, A., and Karl. E. L. (1985). *Introduction to Wave Phenomena*. New York: John Wiley and Sons.
- Holmes, M. H. (1995). *Introduction to Perturbation Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Mei, C. C. (2004). Multiple Scattering by an Extended Region of Inhomogeneities. *Wave Propagation*, Fall.
- Philip, L., and Liu, F. (1986). Resonant Reflection of Water Waves in a Long Channel with Corrugated Boundaries. *J.Fluid Mech*, 179, 371-381. New York: Cornell University.
- Strauss, A. W. (1992). *Partial Differential Equations: An Introduction*. New York: John Wiley and Sons.
- Yu, J., and Mei, C. C. (2000). Do Longshore Bars Shelter the Shore?. *J. Fluid Mech*, 404, 251-268.