KEKONVERGENAN MSE PENDUGA KERNEL SERAGAM FUNGSI INTENSITAS PROSES POISSON PERIODIK DENGAN TREN FUNGSI PANGKAT

Ro'fah Nur Rachmawati

Mathematics & Statistics Department, School of Computer Science, Binus University
Jln. K.H. Syahdan No. 9, Palmerah, Jakarta Barat 11480
rrachmawati@binus.edu

ABSTRACT

The number of customers who come to a service center will be different for each particular time. However, it can be modeled by a stochastic process. One particular form of stochastic process with continuous time and discrete state space is a periodic Poisson process. The intensity function of the process is generally unknown, so we need a method to estimate it. In this paper an estimator of kernel uniform of a periodic Poisson process is formulated with a trend component in a rank function (rank coefficient 0 <b <1 is known, and the slope coefficient of the power function (trend) a> 0 is known). It is also demonstrated the convergenity of the estimators obtained. The result of this paper is a formulation of a uniform kernel estimator for the intensity function of a periodic Poisson process with rank function trends (for the case "a" is known) and the convergenity proof of the estimators obtained.

Keywords*: stochastic process, periodic Poisson process, kernel function, rank function trends*

ABSTRAK

Banyaknya pelanggan yang datang pada suatu pusat servis akan berbeda untuk setiap waktu tertentu dan dapat dimodelkan dengan suatu proses stokastik. Salah satu bentuk khusus dari proses stokastik dengan waktu kontinu dan ruang state diskret adalah proses Poisson periodik yaitu proses Poisson dengan fungsi intensitas berupa fungsi periodik. Fungsi intensitas dari proses tersebut umumnya tidak diketahui, sehingga diperlukan suatu metode untuk menduga fungsi tersebut. Pada tulisan ini dirumuskan suatu penduga tipe kernel seragam dari suatu proses Poisson periodik dengan suatu komponen tren berbentuk fungsi pangkat (koefisien pangkat $0 < b < 1$ *diketahui, dan koefisien kemiringan fungsi pangkat (tren)* $a > 0$ *diketahui), serta dibuktikan pula kekonvergenan dari penduga yang diperoleh. Hasil dari tulisan ini adalah rumusan penduga kernel seragam bagi fungsi intensitas proses Poisson periodik dengan tren fungsi pangkat (untuk kasus* a *diketahui) dan pembuktian kekonvergenan dari penduga yang diperoleh.*

Kata kunci*: proses stokastik, proses poisson periodik, fungsi kernel, tren fungsi pangkat*

PENDAHULUAN

Pemodelan stokastik melibatkan unsur peluang untuk menduga perilaku dari suatu sistem yang tidak diketahui dengan pasti pada masa yang akan datang. Pada tulisan ini dikaji suatu pemodelan stokastik pada pendugaan tipe kernel proses Poisson periodik yang memiliki peranan penting dalam berbagai bidang pada kehidupan sehari-hari. Proses Poisson periodik merupakan salah satu bentuk khusus dari proses stokastik dengan waktu kontinu, dengan fungsi intensitas berupa fungsi periodik. Sebagai contoh, banyaknya kendaraan yang melewati suatu ruas jalan raya akan berbeda untuk setiap waktu tertentu, dalam fenomena pelayanan pelanggan (*costumer service*) yaitu banyaknya pelanggan yang datang ke suatu pusat servis akan berbeda untuk setiap waktu tertentu. Dari pemodelan suatu fenomena yang dimodelkan dengan suatu proses Poisson periodik, fungsi intensitas dari proses tersebut umumnya tidak diketahui, sehingga diperlukan suatu metode untuk menduga fungsi tersebut.

Pendugaan fungsi intensitas proses Poisson periodik tanpa melibatkan suatu komponen tren telah dilakukan kajiannya pada Mangku (2006), namun jika fungsi intensitas pada proses Poisson periodik meningkat berdasarkan suatu fungsi pangkat terhadap waktu maka model yang lebih tepat untuk digunakan adalah proses Poisson periodik dengan suatu komponen tren berbentuk fungsi pangkat. Dalam tulisan ini, pendugaan fungsi intensitas proses Poisson periodik diamati untuk koefisien kemiringan fungsi pangkat (tren) $a > 0$. Sehingga karya ilmiah ini bertujuan untuk menduga fungsi intensitas λ dari suatu proses Poisson periodik dengan tren fungsi pangkat di suatu titik $s \in [0, n]$, dengan menggunakan sebuah realisasi tunggal $N(\omega)$ dari proses Poisson periodik N pada $[0, n]$ (Mangku, 2006: 1) menggunakan metode tipe kernel seragam.

METODE

Metode yang digunakan adalah studi pustaka, dengan dasar teori sebagai berikut:
Suatu fungsi f dikatakan $o(h)$ (*Small oh*) jika

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

(Ross, 2007: 304)

Suatu proses stokastik $\boldsymbol{X} = \{X(t), t \in T\}$ adalah himpunan peubah acak, sehingga untuk setiap $t \in T$, $X(t)$ adalah peubah acak, yang menyatakan keadaan dari proses pada waktu t. Jika T adalah himpunan terhitung, $\boldsymbol{X}$ adalah proses stokastik dengan waktu diskret. Jika T adalah suatu interval, $\boldsymbol{X}$ adalah proses stokastik dengan waktu kontinu (Ross, 2007: 302).

Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses pencacahan jika $N(t)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi sampai waktu t serta memenuhi

(i) $N(t) \geq 0$

(ii) $N(t)$ adalah bilangan bulat

(iii) Jika $s < t$, $N(s) \leq N(t)$

(iv) Jika $s < t$, $N(t) - N(s)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi pada interval (s, t)

(Ross, 2007: 303).

Proses stokastik dengan waktu kontinu $\boldsymbol{X} = \{X(t), t \in T\}$ memiliki inkremen bebas jika untuk setiap $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, peubah acak $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ adalah bebas. Dengan kata lain, banyaknya peristiwa yang terjadi pada interval waktu yang tidak tumpang tindih (*overlap*) adalah bebas (Ross, 2007: 303).

Proses stokastik dengan waktu kontinu $\boldsymbol{X} = \{X(t), t \in T\}$ memiliki inkremen stasioner jika peubah acak $X(t+s) - X(t)$ memiliki sebaran peluang yang sama untuk setiap nilai t. Dengan kata lain, proses perubahan nilai yang terjadi pada suatu interval waktu hanya bergantung dari panjang interval dan tidak bergantung dari lokasi titik-titik waktu tersebut (Ross, 2007: 303).

Proses pencacahan $\{N(t), t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan laju $\lambda, \lambda > 0$, jika

(i) $N(0) = 0$
(ii) Proses memiliki inkreman bebas dan inkremen stasioner
(iii) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$
(iv) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$
(Ross, 2007: 302-303)

Suatu titik *s* disebut titik Lebesgue dari suatu fungsi λ, jika

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |\lambda(x+s) - \lambda(s)| dx = 0.$$

(Wheeden and Zygmund, 1977)

Mean Square Error (*MSE*) dari suatu penduga *U* bagi parameter *g*(*θ*) didefinisikan sebagai

$$MSE(U) = \mathrm{E}(U - g(\theta))^2 = \mathrm{Var}\ (U) + (\mathrm{Bias}\ (U))^2,$$

dengan Bias $(U) = E(U) - g(\theta)$.

Pendugaan tipe kernel umum untuk fungsi intensitas proses Poisson periodik tanpa menggunakan suatu tren telah dibahas oleh Mangku (2006), yang menghasilkan:

$$\hat{\lambda}_{n,K}(s) = \frac{\tau}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} \int_0^n K\left(\frac{x - (s + k\tau)}{h_n}\right) N(dx)$$

adalah penduga bagi λ di titik $s \in [0, \tau)$ dengan periode $(\tau > 0)$ diketahui (Mangku, 2006: 2).

Misalkan *N* adalah proses Poisson pada interval $[0, \infty)$ dengan nilai harapan μ yang kontinu mutlak, dan fungsi intensitas λ yang terintegralkan lokal. Sehingga, untuk setiap himpunan Borel terbatas B maka:

$$\mu(B) = \mathrm{E}\, N(B) = \int_B \lambda(s) ds < \infty.$$

Misalkan fungsi intensitas λ yang terintegralkan lokal dan terdiri atas dua komponen, yaitu komponen periodik $\lambda_c(s)$ dengan periode $(\tau > 0)$ diketahui dan suatu komponen tren berbentuk fungsi pangkat. Dengan kata lain untuk $s \in [0, \infty)$ fungsi intensitas λ dapat ditulis sebagai berikut

$$\lambda(s) = \lambda_c(s) + as^b \qquad (1)$$

dengan as^b adalah komponen tren fungsi pangkat, $a > 0$ menyatakan kemiringan dari tren. Jika $b = 0$, fungsi intensitas λ dapat ditulis menjadi: $\lambda(s) = \lambda_c(s) + a$, yang masih merupakan fungsi periodik. Jika $b = 1$, fungsi intensitas λ dapat ditulis menjadi: $\lambda(s) = \lambda_c(s) + as$, yang merupakan fungsi intensitas dengan tren linear dan pembahasannya dapat dilihat pada Helmers dan Mangku (2009). Sehingga pembahasan pada tulisan ini difokuskan untuk $b \in (0,1)$ sehingga tulisan ini dibatasi hanya untuk $0 < b < 1$.

Tulisan ini tidak mengasumsikan suatu bentuk parametrik dari λ_c, kecuali bahwa λ_c adalah periodik yaitu untuk setiap $s \in [0,\infty)$ dan $k \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s + k\tau) \qquad (2)$$

(Mangku, 2006: 1). Diasumsikan bahwa s adalah titik Lebesgue bagi λ_c, yaitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |\lambda(x+s) - \lambda(s)| dx = 0 \qquad (3)$$

(Mangku, 2006: 2).

Misalkan untuk suatu $\omega \in \Omega$, hanya terdapat sebuah realisasi $N(\omega)$ dari proses Poisson N yang terdefinisi pada suatu ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ dengan fungsi intensitas seperti pada (1) yang diamati pada interval terbatas $[0,n] \in [0,\infty)$. Karena λ_c adalah fungsi periodik dengan periode τ, masalah menduga λ_c pada titik s dengan $s \in \mathbb{R}$ dapat direduksi menjadi masalah menduga λ_c pada titik s dengan $s \in [0,\tau)$ (Mangku, 2006: 1).

Dan h_n adalah barisan dari bilangan real positif yang konvergen menuju nol, yaitu

$$h_n \downarrow 0 \qquad (4)$$

untuk $n \to \infty$ (Mangku, 2006: 2). Perlu diperhatikan bahwa, nilai asimtotik $n \to \infty$ dengan n bukan menyatakan ukuran *sample*, namun n menyatakan panjang interval dari peubah acak $N([0,n])$ yang menyatakan banyaknya kejadian (Mangku, 2006: 2).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pendugaan $\boldsymbol{\lambda_c(s)}$

Penduga tipe kernel dari λ_c pada $s \in [0,\tau)$ untuk kasus a diketahui, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{\lambda}_{c,n,b}(s) = \frac{1-b}{(n/\tau)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n} - \frac{a(1-b)}{(n/\tau)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^b} \qquad (5)$$

dengan

$$n_\tau = \left[\frac{n}{\tau}\right] \text{ dan } L_{n,b} = \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \qquad (6)$$

Penyusunan penduga tipe kernel seperti pada persamaan (5) dapat diuraikan sebagai berikut: Pertama perlu diperhatikan bahwa, pendugaan tipe kernel untuk fungsi intensitas proses Poisson periodik hanya didasarkan pada sebuah realisasi tunggal dari proses Poisson N, dengan demikian diperlukan informasi yang cukup mengenai nilai $\lambda(s)$ pada interval $[0,n]$ (Mangku, 2006: 3). Dengan alasan ini, asumsi (2) memiliki peranan yang sangat penting dibalik penyusunan ide penduga $\bar{\lambda}_{c,n,K}(s)$ untuk $\lambda_c(s)$. Sehingga untuk setiap titik s dan $k \in \mathbb{Z}$ dan dari (1) dan (2) maka

$$\lambda_c(s) = \lambda_c(s+k\tau) = \lambda(s+k\tau) - a(s+k\tau)^b.$$

Dengan pemisalan seperti pada (5), persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\lambda_c(s) &= \frac{1}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b}\left(\lambda(s+k\tau)-a(s+k\tau)^b\right)\\ &= \frac{1}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b}\lambda(s+k\tau)-\frac{a}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{(s+k\tau)^b}{k^b}. \qquad (7)\end{aligned}$$

Pendekatan yang digunakan pada pendugaan fungsi intensitas lokal dari suatu proses Poisson di titik *s* adalah dengan menaksir nilai rata-rata dari banyaknya kejadian di sekitar titik *s*. Secara matematis, misalkan $h_n \downarrow 0$, $n \to \infty$ dan $N([0,t])$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada $[0,t]$, maka fungsi intensitas lokal di titik *s* dapat didekati dengan

$$\frac{1}{2h_n}N([s-h_n, s+h_n]).$$

Dengan demikian Nilai fungsi $\lambda(s+k\tau)$ di titik *s* dapat didekati dengan nilai rataan dari banyaknya kejadian di sekitar *s*, yaitu pada interval $[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ serta dengan menggunakan (3) maka (7) dapat ditulis

$$\bar{\lambda}_{c,n,b}(s) \approx \frac{1}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b}\frac{\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n}-\frac{a}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{(s+k\tau)^b}{k^b}. \qquad (8)$$

Dengan mengganti $\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])$ dengan padanan stokastiknya yaitu $N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])$ maka (8) dapat ditulis

$$\bar{\lambda}_{c,n,b}(s) \approx \frac{1}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n}-\frac{a}{L_{n,b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{(s+k\tau)^b}{k^b}. \qquad (9)$$

Dapat diperhatikan bahwa

$$L_{n,b} = \sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b} \approx \frac{(n/\tau)^{1-b}}{1-b}$$

yang menyatakan $L_{n,b}$ setara asimotik dengan $\frac{(n/\tau)^{1-b}}{1-b}$ jika $n \to \infty$. Dengan mengganti $L_{n,b}$ dengan $\frac{(n/\tau)^{1-b}}{1-b}$, diperoleh penduga bagi $\lambda_c(s)$, yaitu

$$\bar{\lambda}_{c,n,b}(s) = \frac{1-b}{(n/\tau)^{1-b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^b}\frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n}-\frac{a(1-b)}{(n/\tau)^{1-b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{(s+k\tau)^b}{k^b}.$$

Kekonvergean MSE

Lema 1: (Ketakbiasan Asimtotik)

Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi (1) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (4) dipenuhi maka

$$\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \rightarrow \lambda_c(s) \qquad (10)$$

untuk $n \rightarrow \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c. Dengan kata lain $\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)$ adalah penduga tak bias asimtotik bagi $\lambda_c(s)$.

Bukti:

Untuk membuktikan (10) akan diperlihatkan bahwa

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \lambda_c(s) \qquad (11)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (11) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \frac{\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n} - \mathrm{E}\frac{a(1-b)}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^b}.$$

Karena suku kedua pada ruas kanan persamaan di atas adalah deterministik maka

$$\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \frac{\mathrm{E}N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n} - \frac{a(1-b)}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^b}. \qquad (12)$$

Suku pertama pada ruas kanan persamaan (12) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \int_{s+k\tau-h_n}^{s+k\tau+h_n} \lambda(y)dy.$$

Dengan melakukan penggantian peubah $x = y - s - k\tau$, ruas kanan di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b} 2h_n} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda(x+s+k\tau)dx.$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), maka kuantitas di atas yang merupakan suku pertama persamaan (12) menjadi

$$\frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b} 2h_n} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(x+s)dx + \frac{a(1-b)}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b} 2h_n} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \int_{-h_n}^{h_n} (x+s+k \qquad (13)$$

Perhatikan bahwa untuk $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} = \frac{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}}{1-b} + O(1). \qquad (14)$$

Sehingga suku pertama persamaan (13) menjadi

$$\frac{1-b}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b} 2h_n} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda(x+s)dx$$

$$= \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(x+s)dx + O\left(\frac{1}{n^{1-b}}\right) \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(x+s)dx. \qquad (15)$$

Suku pertama pada ruas kanan persamaan (15) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \big(\lambda_c(x+s) - (s)\big)dx + \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \lambda_c(s)dx. \qquad (16)$$

Untuk menunjukkan bahwa suku pertama persamaan (16) adalah konvergen ke nol, akan digunakan nilai yang lebih besar, yaitu

$$\frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} |\lambda_c(x+s) - (s)|dx. \qquad (17)$$

Berdasarkan asumsi (4) dan dengan asumsi bahwa s adalah titik Lebesgue bagi λ_c, maka kuantitas pada (17) akan menuju nol jika $n \to \infty$, atau dapat juga ditulis $o(1)$. Sedangkan suku kedua persamaan (16) adalah $\lambda_c(s)$. Suku kedua persamaan (15) adalah $o(1)$. Sehingga diperoleh nilai bagi suku pertama persamaan (13) akan sama dengan

$$\lambda_c(s) + o(1) \qquad (18)$$

untuk $n \to \infty$.

Dengan menggunakan deret Taylor, suku kedua persamaan (13) diuraikan sebagai berikut

$$(x+s+k\tau)^b = (s+k\tau)^b + b(s+k\tau)^{b-1}x + b(b-1)(s+k\tau)^{b-2}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Karena $h_n \downarrow 0$ untuk $n \to \infty$, maka dari persamaan di atas, dapat disimpulkan bahwa x memiliki sifat yang sama dengan h_n, sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$(x+s+k\tau)^b = (s+k\tau)^b + O(h_n).$$

Sehingga suku kedua persamaan (13) menjadi

$$\frac{a(1-b)}{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{(s+k\tau)^b}{k^b}+o(1). \qquad (19)$$

untuk $n \to \infty$. Dengan menyubstitusikan (18) dan (19) ke ruas kanan persamaan (12), diperoleh

$$\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to \lambda_c(s) \qquad (20)$$

untuk $n \to \infty$.
Dengan demikian Lema 1 Terbukti.

Lema 2: (Kekonvergenan Ragam)

Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi (1) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (4) dipenuhi, λ_c terbatas di sekitar s dan $n^{1-b}h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$ maka

$$\mathrm{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to 0 \qquad (21)$$

untuk $n \to \infty$.

Bukti :

Karena $h_n \downarrow 0$ jika $n \to \infty$, maka untuk nilai n yang cukup besar, interval $[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ dan $[s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n]$ untuk $k \neq j$ adalah tidak *overlap*. Akibatnya, berdasarkan sifat inkremen bebas dari proses Poisson, diperoleh bahwa $N[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n]$ dan $N[s+j\tau-h_n, s+j\tau+h_n]$ untuk $k \neq j$ adalah peubah acak bebas. Sehingga suku pertama dari penduga tipe kernel bagi $\lambda_c(s)$ merupakan penjumlahan dari peubah acak bebas, dan karena suku kedua penduga tersebut adalah deterministik, maka diperoleh

$$\mathrm{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \frac{(1-b)^2}{4{h_n}^2(n/\tau)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\mathrm{Var}\,[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n].$$

Karena *N* adalah suatu proses Poisson, ragam akan sama dengan nilai harapan, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\mathrm{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \frac{(1-b)^2}{4{h_n}^2(n/\tau)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\mathrm{E}\,[s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n].$$

Ruas kanan persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\frac{(1-b)^2}{4{h_n}^2(n/\tau)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\int_{s+k\tau-h_n}^{s+k\tau+h_n}\lambda(y)dy.$$

Dengan melakukan penggantian peubah $x = y - s - k\tau$, ruas kanan di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{(1-b)^2}{4{h_n}^2(n/\tau)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda(x+s+k\tau)dx.$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), maka kuantitas di atas adalah

$$\frac{(1-b)^2}{4{h_n}^2\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(x+s)+a(x+s+k\tau)^b dx.$$

$$=\frac{(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_c(x+s)dx$$

$$+\frac{a(1-b)^2}{4{h_n}^2\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\int_{-h_n}^{h_n}(x+s+k\tau)^b dx \qquad (22)$$

Karena $h_n \downarrow 0$ untuk $n \to \infty$ dan λ_c memiliki nilai yang terbatas di sekitar s, yaitu ada λ_0 sehingga

$$\lambda_c(x+s) \leq \lambda_0 = O(1)$$

dengan λ_0 adalah suatu konstanta yang tidak menuju tak hingga. Sehingga suku pertama dari ruas kanan persamaan (22) menjadi

$$\leq \frac{(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\frac{1}{2h_n}\int_{-h_n}^{h_n}\lambda_0 dx = \left(\frac{(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}}\right)O(1) \qquad (23)$$

untuk $n \to \infty$.
Untuk melakukan pendekatan terhadap kuantitas pada ruas kanan persamaan (23), akan dikaji untuk tiga kasus, yaitu untuk $0 < b < \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$, dan $\frac{1}{2} < b < 1$.

Untuk $0 < b < \frac{1}{2}$, dapat diperhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}} = \frac{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-2b}}{1-2b} + O(1),$$

jika $n \to \infty$.

Sehingga kuantitas pada ruas kanan persamaan (23) menjadi

$$=\left(\frac{(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}}\frac{\left(\frac{n}{\tau}\right)^{1-2b}}{1-2b}+O\left(\frac{1}{h_n n^{2-2b}}\right)\right)O(1) = O\left(\frac{1}{nh_n}\right) \qquad (24)$$

untuk $n \to \infty$.
Untuk $b = \frac{1}{2}$, dapat diperhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n_\tau}\frac{1}{k^{2b}} = \ln n + O(1)$$

jika $n \to \infty$.
Sehingga kuantitas pada ruas kanan persamaan (23) menjadi

$$= \left(\frac{1/4}{2h_n \left(\frac{n}{\tau}\right)} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k} \right) O(1) = O\left(\frac{1}{(n/\ln n)h_n}\right) \tag{25}$$

untuk $n \to \infty$.
Untuk $\frac{1}{2} < b < 1$, dapat diperhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^{2b}} = O(1)$$

untuk $n \to \infty$.

Sehingga kuantitas pada ruas kanan persamaan (23) menjadi

$$= \left(\frac{(1-b)^2}{2h_n \left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \right) O(1) = O\left(\frac{1}{n^{2-2b} h_n}\right) \tag{26}$$

untuk $n \to \infty$.

Kuantitas pada ruas kanan (23) dapat dihampiri dengan mengambil kuantitas terbesar dari (24), (25), dan (26). Kuantitas terbesarnya adalah (26), sehingga dapat diperoleh kuantitas pada (23) yang juga menyatakan kuantitas pada suku pertama persamaan (22), yaitu

$$O\left(\frac{1}{n^{2-2b} h_n}\right) \tag{27}$$

untuk $n \to \infty$.

Dengan menggunakan deret Taylor seperti pada pembuktian Lema 1 mengenai ketakbiasan asimtotik, maka suku kedua dari ruas kanan persamaan (22) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} &= \frac{a(1-b)^2}{2h_n \left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^{2b}} \frac{1}{2h_n} \int_{-h_n}^{h_n} \left((s+k\tau)^b + O(h_n)\right) dx \\ &= \frac{a(1-b)^2}{2h_n \left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^{2b}} + O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

untuk $n \to \infty$.

Dengan mensubstitusikan (27) dan (28) ke persamaan (22), diperoleh

$$\text{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right) + \frac{a(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^{2b}} + O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right)$$

$$= \frac{a(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^{2b}} + O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right) \qquad (29)$$

untuk $n \to \infty$.

Dapat diperhatikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^{2b}} = \sum_{k=1}^{n_\tau} \left(\frac{\tau}{k} + \frac{s}{k^2}\right)^b. \qquad (30)$$

Dengan menggunakan deret Taylor, maka

$$\left(\frac{\tau}{k} + \frac{s}{k^2}\right)^b = \left(\frac{\tau}{k}\right)^b + b\left(\frac{\tau}{k}\right)^{b-1}\left(\frac{s}{k^2}\right) + b(b-1)\left(\frac{\tau}{k}\right)^{b-2}\left(\frac{s}{2k^2}\right) + \cdots$$

Karena $\frac{s}{k^2} \to 0$ untuk $n \to \infty$, kuantitas persamaan (30) menjadi

$$\sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^{2b}} = \frac{n^{1-b}(1/\tau)^{1-2b}}{1-b} + O(1).$$

Sehingga kuantitas pada (29) menjadi

$$= \frac{a(1-b)^2}{2h_n\left(\frac{n}{\tau}\right)^{2-2b}} \left(\frac{n^{1-b}(1/\tau)^{1-2b}}{1-b} + O(1)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right)$$

$$= \frac{a(1-b)}{2h_n n^{1-b}/\tau} + O\left(\frac{1}{n^{2-2b}}\right)$$

Nilai dari $\frac{1}{n^{1-b}} = o(1)$ untuk $n \to \infty$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$= \frac{a\tau(1-b)}{2h_n n^{1-b}} + O\left(\frac{1}{h_n n^{1-b}}\right). \qquad (31)$$

Berdasarkan asumsi pada Lema 2, bahwa $n^{1-b}h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka kuantitas pada (31) akan sama dengan $o(1)$ untuk $n \to \infty$. Sehingga diperoleh

$$\text{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to 0$$

untuk $n \to \infty$.
Dengan demikian Lema 2 terbukti.

Teorema 1: (Kekonvergenan *MSE*)

Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi (1) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (4) dipenuhi dan $n^{1-b}h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka

$$MSE\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to 0$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c.

Bukti :

Dari Lema 1 telah diperoleh bahwa

$$\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to \lambda_c(s),$$

yang berarti untuk $n \to \infty$ maka $\mathrm{E}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) - \lambda_c(s) \to 0$. Dari Lema 2 diperoleh

$$\mathrm{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to 0$$

untuk $n \to \infty$, akibatnya dengan menggunakan Definisi *MSE* akan diperoleh

$$MSE\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) = \mathrm{Var}\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) + \left(\mathrm{Bias}\ \bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right)^2 \to 0.$$

Dengan demikian Teorema 1 terbukti.

PENUTUP

Dari kajian yang telah dilakukan, diperoleh. Penduga tipe kernel seragam bagi λ_c pada $s \in [0,\tau)$ untuk nilai a diketahui adalah:

$$\bar{\lambda}_{c,n,b}(s) = \frac{1-b}{(n/\tau)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b} \frac{N([s+k\tau-h_n, s+k\tau+h_n])}{2h_n} - \frac{a(1-b)}{(n/\tau)^{1-b}} \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{(s+k\tau)^b}{k^b}$$

dengan n adalah panjang interval pengamatan, $n_\tau = \left[\frac{n}{\tau}\right]$, $L_{n,b} = \sum_{k=1}^{n_\tau} \frac{1}{k^b}$, K adalah suatu kernel, dan h_n adalah barisan bilangan real positif yang konvergen menuju nol, yaitu $h_n \downarrow 0$ untuk $n \to \infty$.

Misalkan fungsi intensitas λ memenuhi (1) dan terintegralkan lokal. Jika asumsi (4) dipenuhi dan $n^{1-b}h_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$, maka

$$MSE\left(\bar{\lambda}_{c,n,b}(s)\right) \to 0$$

untuk $n \to \infty$, asalkan s adalah titik Lebesgue bagi λ_c.

DAFTAR PUSTAKA

Helmers, R., Mangku. I. W. (2009). Estimating the Intensity of a Cyclic Poisson Process in the Precense of Linear Trend. *Ann. Inst. Stat. Math*, *61* (3), 559-628.

Mangku, I. W. (2006). Asymptotic Normality of a Kernel-type Estimator for the Intensity of a Periodic Poisson Process. *Journal of Mathematics and Its Applications,* 5 (2), 13-22.

Mangku, I. W. (2006). Weak and Strong Convergence of a Kernel-type Estimator for the Intensity of a Periodic Poisson Process. *Journal of Mathematics and Its Applications*, *5* (1), 1-12.

Ross, S. M. (2007). *An Introduction to Probability Models* (*Nine Edition*). New York: John Wiley & Sons.

Wheeden, R.L., Zygmund. A. (1997). *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. New York: Marcell Dekker.