JURNAL EMACS
[Engineering, MAthematics and Computer Science] Vol.4 No.2 May 2022: 51-54
e-ISSN: 2686-2573
DOI: 10.21512/emacsjournal.v4i2.8185

Asal Usul Rumus Dasar Transformasi Laplace

Wikaria Gazali
Mathematics Department, School of Computer Science,
Bina Nusantara University,
Jakarta, Indonesia 11530
wikaria@binus.ac.id

*Correspondence: wikaria@binus.ac.id

Abstract *– This paper discusses the Origin of the Basic Formula of the Laplace Transform* $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$. *To obtain this model, the author derives the basic formula for the Laplace Transform from a Power Series. In this derivation, we use Euler's number to the power of the function and the Maclaurin Series to obtain the derivation of the Basic Formula for the Laplace Transform where the Maclaurin Series is derived from the Taylor Series.*

Keywords: *Laplace Transform; Power Series; Maclaurin Series*

Abstrak *– Makalah ini membahas tentang Asal Usul Rumus Dasar Transformasi Laplace* $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$. *Untuk memperoleh model tersebut penulis menurunkan rumus dasar Transformasi Laplace dari Deret Kuasa. Pada turunan ini, kami menggunakan bilangan Euler pangkat fungsi dan Deret Maclaurin untuk memperoleh turunan dari Rumus Dasar Transformasi Laplace dimana Deret Maclaurin diturunkan dari Deret Taylor.*

Kata Kunci: *Transformasi Laplace; Deret Kuasa; Deret Mac Laurin*

I. PENDAHULUAN

Rumus Dasar Transformasi Laplace $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$ pertama kali dikemukakan oleh bapak Pierre-Simon, Marquis de Laplace (lahir 23 Maret 1749 dan meninggal 5 Maret 1827 pada usia 77 tahun), beliau adalah seorang ahli Matematika dan Astronom Prancis.

Matematikawan sering menggunakan Rumus dasar Transformasi Laplace, tetapi banyak matematikawan belum tahu dari mana asal usul rumus dasar dari Transformasi Laplace tersebut.

Bapak Profesor Emeritus Arthur Paul Mattuck (lahir 13 Juni 1930 dan meninggal 8 Oktober 2021 pada usia 91 tahun) adalah seorang Profesor Emeritus Matematika di Massachusetts Institute of Technology (MIT), beliau terkenal karena bukunya tahun 1998, Pengantar Analisis (ISBN 013-0-81-1327) dan video kuliah Persamaan Diferensialnya yang ditampilkan di MIT's OpenCourseWare.

Bapak Profesor Emeritus Arthur Paul Mattuck pada 8 November 2008 menjelaskan "*Where the Laplace Transform comes from*" pasa saat memberi kuliah di MIT. Saat itu penjelasan beliau tidak terlalu rinci, oleh karena itu penulis ingin memperjelas rinciannya dengan bantuan Deret Mac Laurin.

II. METODOLOGI PENELITIAN

Penemu Rumus Transformasi Laplace adalah bapak Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749 - 1827) $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$, tetapi penurunan rumus tersebut jarang dikemukakan secara jelas oleh para ahli matematika, kecuali bapak Profesor Emeritus Arthur Paul Mattuck (1930 – 2021) pada 8 November 2008 menjelaskannya sewaktu memberi kuliah di MIT dan pada saat itu penjelasan beliau tidak terlalu rinci, oleh karena itu penulis akan menyampaikan secara detail dari mana asal usul Transformasi Laplace tersebut, yaitu dengan merincikan deretnya dengan Deret Geometri Turun Tak Hingga dan Deret Mac Laurin.

Untuk memperjelas Rumus Transformasi Laplace tersebut, terlebih dahulu mengetahui bilangan Euler berpangkat fungsi $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (Wikaria Gazali,

2021) dalam Transformasi Laplace menggunakan Deret Maclaurin, di mana Deret Maclaurin berasal dari Deret Taylor dan a≠0.

Deret Taylor, a≠0 :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots$$

Deret Taylor berasal dari Persamaan Garis singgung melalui satu Titik (x_1, y_1) dan gradiennya adalah m.

Jika y = f(x) dan x_1 = a , maka :

m = f'(x_1) = f'(a)

Jika y = f(x), maka y_1= f(x_1) = f(a)

Maka Persamaan Garis Singgung melalui (x_1, y_1) dengan gradien m = a :

y - y_1 = m (x - x_1)

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$$

Jika diekspansi, maka terjadilah Deret Taylor :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots$$

Jika a = 0 pada Deret Taylor, maka terjadilah Deret Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam hal ini untuk mendapatkan penurunan Rumus Dasar Transformasi Laplace, penulis menggunakan Deret Kuasa (Power Series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Misalkan Deret Kuasa (Power Series) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = A(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot x^n = A(x),$$

continuous Analog : n = 0, 1, 2, 3, …

$$t: \ 0 \le x < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot x^n = A(x)$$

$$a(n) \quad \to A(x)$$

$$1 \quad \to \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{n!} \quad \to e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot x^n = A(x)$$

Jika n = t , maka $\int_0^{\infty} a(t) \cdot x^t \, dt = A(x)$ …………………..….(1)

Ambil $a(t) = f(t)$,

$x = e^{\ln x}$ di mana $0 < x < 1$, $\ln x < 0$

Misalkan : $\ln x = -s$,

$\ln x = \ln e^{-s}$,

maka $x = e^{-s}$

Jadi $x^t = (e^{-s})^t$,

$$(1) \to \int_0^{\infty} a(t) \cdot x^t \, dt = A(x),$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \, dt = F(s),$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \, dt = F(s)$$

Transformasi Laplace (*Laplace Transform*) *(Mattuck, 2008)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot x^n = A(x)$$

$$a(n) \quad \to A(x)$$

$$1 \quad \to \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1$$

Artinya $a(n) = 1$,

Jadi :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1)\cdot x^n = \frac{1}{1-x}$$

Bukti :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1)\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

di mana

$U_1 = a = 1$ dan $U_2 = x\ ,\ r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{x}{1} = x$

(Deret Geometri Turun Tak Hingga)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1)\cdot x^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$ (TERBUKTI)

(Wikaria, 2007)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\cdot x^n = A(x)$$

$$a(n) \quad \to A(x)$$

$$\frac{1}{n\,!} \quad \to e^x$$

Artinya $a(n) = \frac{1}{n\,!}$,

Jadi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\cdot x^n = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}$$

$$= \frac{x^0}{0\,!} + \frac{x^1}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\cdot x^n = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

di mana

$$f(x) = e^x \ \to\ f(0) = e^0 = 1$$

$$f'^{(x)} = e^x \ \to\ f'^{(0)} = e^0 = 1$$

$$f''^{(x)} = e^x \ \to\ f''^{(0)} = e^0 = 1$$

$$f'''^{(x)} = e^x \ \to\ f'''^{(0)} = e^0 = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \ \to\ f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x) = e^x \ \to\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Deret Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'^{(0)}}{1\,!}\,x + \frac{f''^{(0)}}{2\,!}\,x^2 + \frac{f'''^{(0)}}{3\,!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4\,!}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1\,!}\,x + \frac{1}{2\,!}\,x^2 + + \frac{1}{3\,!}\,x^3 + \frac{1}{4\,!}\,x^4 + \cdots + \frac{1}{n\,!}\,x^n + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots \qquad \ldots\ldots(3)$$

Dari (2) dan (3) diperoleh :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\cdot x^n = e^x$$

(TERBUKTI)

(Wikaria, 2007)

IV. KESIMPULAN

Penurunan Rumus Dasar Transformasi Laplace telah diuraikan di atas dan diperoleh penurunannya :

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

Pada penurunan ini, menggunakan bilangan Euler berpangkat fungsi dan Deret Maclaurin untuk memperoleh turunan dari Rumus Dasar Transformasi Laplace di mana Deret Maclaurin diperoleh dari Deret Taylor.

DAFTAR PUSTAKA

Binmore, K., Davies, J. (2002). Calculus: Concepts and Methods. CAMBRIDGE Published.

Briggs, W., Cochran, L., et al. (2018). Calculus: Early Transcendentals Third Edition. Pearson Published.

Buck, R.C. (2003). Advanced Calculus. Waveland Pr Inc Published.

Friedman, A. (2007). Advanced Calculus. DOVER PUBN INC Published.

Gazali, W. (2007). Kalkulus Edisi 2. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Gazali, W. (2018). Kalkulus Lanjut Edisi 3. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Gazali, W. (2022). Euler Formula Derivation. Engineering, MAthematics and Computer Science (EMACS)

Journal, 4(1), 15-17.

Larson, R., H. Edwards, B. (2017). Calculus. CENGAGE Published.

Loomis, L.H., Sternberg, S. (2014). Advanced Calculus Revisesd Edition. World Scientific Published.

Mattuck, A. (2008). (1:2) Where the Laplace Transform comes from. MIT: *https://www.youtube.com/watch?v=zvbdoSeGAgI&t=93s*

Mattuck, A. (2008). (2:2) Where the Laplace Transform comes from. MIT: *https://www.youtube.com/watch?v=hqOboV2jgVo&t=232s*

Morris, C.C., Stark, R.M. (2015). Fundamentals of Calculus. Wiley Published.

Neill, Hugh. (2018). Calculus: A Complete Introduction. TEACH YOURSELF Published.

Nickerson, H.K., Spencer, D.C., Steenrod, N.E. (2011). Advanced Calculus. Dover Publication, Inc.

STEWART, J. (2008). CALCULUS Early Transcendentals Sixth Edition. Mc MASTER UNIVERSITY: Thomson Brooks/ Cole.

Wrede, R., Spiegel, M.R. (2019). Schuam's Outline of Theory and Problems in Advanced Calculus Second Editi2). Kalkulus Edisi 2. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.