Order Theory I and II as Foundations for Finding Relationship between Formulas

Stephanus Ivan Goenawan

Department of Industrial Engineering,
Atma Jaya Catholic University,
Jakarta, Indonesia 11480
steph.goenawan@atmajaya.ac.id

***Abstract** – Order theory is generated through the process of induction logic from solving several mathematical functions so that it can be formulated in general the pattern of regularity. If there are function and associates each other is organized and interconnected, then the constants will also be organized and interconnected. Similarly, if there are function and associates that are mutually regulated and the constants that make them organized and interrelated, then the function basis and associates will also have interconnected properties. The purpose of this researh is to introduce and utilize the Order Theory to find relationships between constants in function and associates that have the certain rules.*

***Abstrak** – Teori Keteraturan dihasilkan melalui proses logika induksi dari pemecahan beberapa fungsi matematik sehingga mampu dirumuskan secara umum pola keteraturannya. Apabila terdapat fungsi beserta kawannya saling teratur dan saling berhubungan, maka konstanta-konstantanya juga akan teratur dan saling berhubungan. Demikian juga sebaliknya apabila terdapat fungsi beserta kawannya saling teratur serta konstanta-konstanta yang menyusunnya teratur dan saling terkait, maka basis fungsi beserta kawannya juga akan mempunyai sifat saling berhubungan. Tujuan penelitian adalah memperkenalkan dan memanfaatkan Teori Keteraturan untuk mencari hubungan antar konstanta pada fungsi dan kawannya yang punya aturan tertentu.*

***Keywords:** Order Theory; Function; Function Basis.*

I. PENDAHULUAN

Pembahasan mengenai Teori Keteraturan ini merupakan hal yang bermanfaat karena dapat digunakan sebagai salah satu ilmu dasar bagi perkembangan ilmu komputer. Terdapat hal yang menantang dari teori baru ini adalah belum dapat dibuktikan teori ini secara analitik, tetapi pembuktian secara tak langsung yaitu aplikasi-aplikasi dari teori keteraturan, membuktikan bahwa teori keteraturan dapat diandalkan. Perlu diakui bahwa apabila suatu teori belum dapat dibuktikan secara analitik walaupun banyak aplikasi dari teori tesebut mendukung kebenarannya, tetap teori baru tersebut belum dapat dinyatakan sahih seratus persen. Oleh karena itu penulis membuka kesempatan bagi siapa saja yang dapat membuktikan ataupun menggugurkan teori tersebut secara analitik, akan memperoleh penghargaan dari penulis sebesar dua puluh lima juta rupiah (Rp.25.000.0000,.). Apakah selama belum ditemukan pembuktian teori keteraturan secara analitik, berarti juga aplikasi dari teori ini diragukan? Tentu saja selama belum ada bukti yang menggugurkan teori tersebut maka kebenaran dari teori keteraturan tetap boleh diandalkan. Aplikasi-aplikasi yang diperoleh dari pemanfaatan teori keteraturan akan lebih mengukuhkan kebenaran teori tersebut, walaupun tentu saja belum dapat membuktikan kebenaran teori keteraturan secara mutlak.

II. METODOLOGI PENELITIAN

Teori Keteraturan ini dihasilkan melalui proses logika induksi dari pemecahan beberapa fungsi matematik sehingga mampu dirumuskan secara umum menjadi Teori Keteraturan I dan II. Di bawah ini isi pernyataan dari teori keteraturan I,

"Bila terdapat fungsi beserta kawannya saling teratur (punya aturan tertentu dalam menentukan fungsi beserta kawannya) dan saling berhubungan, maka konstanta-konstantanya juga akan teratur (punya aturan tertentu dalam mencari konstanta-konstantanya) dan saling berhubungan (konstanta-konstantanya saling terkait)".

Penjelasan dari pernyataan teori keteraturan akan dijelaskan sbb.

a. Fungsi beserta kawannya, $f(x_1;x_2;x_3;...)$ disebut saling teratur apabila fungsi beserta kawannya tersebut mempunyai aturan tertentu dalam menentukannya.
Contoh: fungsi beserta kawannya teratur (Anton 1989 & Jerome 1983)

$$f(x_1;x_2) = \prod_{i=0}^{x_1-1}(x_2+i) \tag{2.1}$$

di mana range x_1 adalah bilangan integer positip, dan x_2 adalah bilangan real.

b. Fungsi beserta kawannya, $f(x_1;x_2;x_3;...)$ disebut saling berhubungan apabila jalannya perambatan penjumlahan suku (dapat lebih dari satu pola) suatu fungsi $g(i;x_1;x_2;x_3;...)$ dari $i=1$ sampai dengan x_1 dapat ditentukan di dalam menentukan fungsi $f(x_1;x_2;x_3;...)$. Range untuk variabel x_1 adalah bilangan integer positip.

Contoh : fungsi beserta kawannya saling berhubungan

$$f(x_1;x_2) = \sum_{i=1}^{x_1} c(i,x_1)\cdot g(i,x_1,x_2)$$

dimana, basis fungsi $g(i,x_1,x_2) = x_2^{(x_1+1-i)}$

(2.2)

c. Apabila syarat bentuk fungsi-fungsi di atas terpenuhi, maka konstanta-konstantanya yaitu $c(i,x_1)$ akan mudah diperoleh, karena konstanta-konstanta tersebut mempunyai sifat teratur dan saling berhubungan. Teratur maksudnya mempunyai aturan tertentu dalam mencarinya. Sedangkan saling berhubungan maksudnya mempunyai saling keterkaitan antar konstanta yang satu dengan konstanta yang lainnya, serta dapat saling dihubungkan dengan variabel posisi yaitu i (bilangan integer) dan variabel yang menunjukkan tingkatan dari fungsi-fungsi tersebut, yaitu x_1 (bilangan integer), sedangkan jenis variabel lainnya tidak mempengaruhinya. Tentu saja jenis jumlah variabel untuk menunjukkan tingkatan suatu fungsi dapat lebih dari satu dan harus dapat diidentifikasikan dengan menggunakan bilangan integer (Abramowitz 1983, Arfken 2005 & Bayin 2006).

Contoh : konstanta-konstanta yang teratur dan saling berhubungan dari kedua fungsi di atas.

$$c(i,x_1) = (x_1-1)\cdot c((i-1),(x_1-1)) + c(i,(x_1-1))$$

dengan syarat :

- $c(1,x_1) = 1$
- $c(i,x_1) > 0, \quad \textit{bila} \quad 1 \le i \le x_1$
- $c(i,x_1) = 0, \quad \textit{bila} \quad i > x_1$

(2.3)

Selanjutnya dari beberapa permasalahan yang telah penulis selesaikan ternyata pernyataan dari Teori Keteraturan di atas dapat diperluas lagi sebagai Teori Keteraturan II. Di bawah ini isi pernyataan dari Teori Keteraturan II,

"*Bila terdapat fungsi beserta kawannya saling teratur (punya aturan tertentu dalam menentukan fungsi beserta kawannya) serta konstanta-konstanta yang menyusunnya teratur (punya aturan tertentu dalam mencari konstanta-konstantanya) dan saling terkait (konstanta-konstantanya saling terkait), maka basis fungsi beserta kawannya akan mempunyai sifat saling berhubungan".*

Fungsi beserta kawannya, $f(x_1;x_2;x_3;...)$, mempunyai sifat saling berhubungan apabila jalannya perambatan konstanta-konstanta penjumlahan suku (dapat lebih dari satu pola) suatu fungsi $g(i;x_1;x_2;x_3;...)$ dari $i=1$ sampai dengan x_1 dapat ditentukan guna mencari fungsi $f(x_1;x_2;x_3;...)$. Basis fungsi $g(i;x_1;x_2;x_3;...)$ dapat kita tentukan karena mempunyai hubungan dengan basis fungsi sebelumnya. Range untuk variabel x_1 adalah bilangan integer positip. Bila dicermati Teori Keteraturan II merupakan pelengkap dari Teori Keteraturan I, kalau hubungan antar konstanta saling terkait pers.(2.3) maka basis fungsinya juga dapat diformulasikan pers.(2.2).

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah selanjutnya akan dibuktikan hasil dari permasalahan di atas dengan menggunakan Teori keteraturan. Penyelesaian masalah contoh di atas menggunakan Teori Keteraturan, mula-mula perlu dijabarkan persoalan tersebut beberapa tahap, kemudian dengan menganalisa bentuknya akan diperoleh sifat keteraturan dalam menentukan nilai konstannta-konstantanya.

$$\begin{aligned}
f(1,x_2) &= x_2 \\
f(2,x_2) &= x_2^{2} + x_2 \\
f(3,x_2) &= x_2^{3} + 3\cdot x_2^{2} + 2\cdot x_2 \\
f(4,x_2) &= x_2^{4} + 6\cdot x_2^{3} + 1\ \cdot x_2^{2} + 6\cdot x_2 \\
f(5,x_2) &= x_2^{5} + 10\cdot x_2^{4} + 35\cdot x_2^{3} + 50\cdot x_2^{2} + 24\cdot x_2 \\
f(6,x_2) &= x_2^{6} + 15\cdot x_2^{5} + 85\cdot x_2^{4} + 225\cdot x_2^{3} + 274\cdot x_2^{2} + 120\cdot x_2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Dengan melihat formasi pers. (3.1) dapat dianalisa jalannya perambatan penjumlahan suku suatu fungsi (2.1), yaitu

$$g(i,x_1,x_2) = x_2^{(x_1+1-i)} \tag{3.2}$$

sehingga diperoleh hubungan,

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= \sum_{i=1}^{x_1} c(i,x_1)\cdot g(i,x_1,x_2) \\
&= \sum_{i=1}^{x_1} c(i,x_1)\cdot x_2^{(x_1+1-i)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Apabila soal di atas dianalisa dengan menggunakan Teori Keteraturan akan diperoleh suatu kesimpulan bahwa nilai konstanta-konstanta $c(i, x_1)$ akan mempunyai sifat teratur dan saling berhubungan (Belousov 1962, Courant 1953, Dunster 2010 & El Attar 2009). Di bawah ini akan ditampilkan tabel konstanta-konstanta $c(i, x_1)$ guna mempermudah untuk menganalisa.

Tabel 1 : tabel nilai-nilai konstanta dari fungsi contoh soal (2.1).

x_1	$c(1,x_1)$	$c(2,x_1)$	$c(3,x_1)$	$c(4,x_1)$	$c(5,x_1)$
1	1				
2	1	1			
3	1	3	2		
4	1	6	11	6	
5	1	10	35	50	24

Dari hasil analisa menggunakan teori keteraturan untuk mencari konstanta $c(i, x_1)$ ternyata dapat dicari dari dua jenis konstanta sebelumnya, yaitu penjumlahan antara konstanta $c((i-1), (x_1-1))$ yang dikalikan faktor (x_1-1) dengan konstanta $c(i,(x_1-1))$. Hubungan konstanta-konstanta tersebut juga diikuti beberapa persyaratan tertentu, hal ini terlihat pada pers.(2.3).

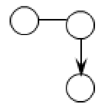
Hubungan konstanta-konstanta secara umum telah dapat ditentukan, sehingga untuk mendapatkan hubungan yang lebih spesifik juga dapat diperoleh, misalnya mencari konstanta.

$$\begin{aligned} c(x_1, x_1) &= (x_1-1)\cdot c((x_1-1), (x_1-1)) \\ &= (x_1-1)! \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hubungan Antar Konstanta

Metode secara khusus atau spesifik guna mendapatkan hubungan antar konstanta-konstanta yang saling terkait dalam keteraturan dan saling berhubungan menurut teori keteraturan sebenarnya tidak ada. Hal ini dapat dilihat dari sisi tertentu merupakan suatu kendala, akan tetapi dari sisi yang lain merupakan suatu tantangan guna mendapatkan hubungan tersebut (Goenawan 2002). Bahkan dalam mencari hubungan tersebut dibutuhkan kemampuan logika induksi untuk mendapatkan keteraturan pola (Goenawan 2003). Semakin banyak mencoba dalam memecahkan permasalahan, semakin lebih terpola untuk menyelesaikan apabila masalah yang baru muncul. Hal ini dikarenakan hubungan keterkaitan antar konstanta masing-masing fungsi mempunyai pola yang lain dalam berhubungan antar konstanta, walaupun tidak menutup kemungkinan dapat sama. Pola dari contoh di atas dapat digambarkan sebagai berikut yang dinamakan sebagai pola faktorial,

$c((i-1), (x_1-1))$ $c(i,(x_1-1))$



$c(i, x_1)$

Keterangan: Hubungan keterkaitan untuk mendapatkan konstanta $c(i, x_1)$ adalah berpola pada bentuk disamping, yaitu terkait dengan konstanta $c((i-1), (x_1-1))$ dan $c(i,(x_1-1))$.

Bertambahnya kemampuan logika induksi dalam penentuan hubungan keteraturan pola dapat dicapai dengan seberapa banyak masalah yang telah dipecahkan. Setelah polanya diketahui kemudian dilanjutkan dengan menentukan hubungan yang saling terkait pada konstanta-konstanta tersebut. Penyelesaiannya dapat dilakukan dengan mensubstitusikan beberapa konstanta yang telah diketahui ke dalam pola dan membentuk beberapa persamaan guna mencari parameter yang mengikuti konstanta tersebut. Cara memperoleh parameter dapat dilakukan dengan *eliminasi/ substitusi*, dengan persyaratan telah dibentuk beberapa persamaan sehingga memungkinkan parameter-parameter tersebut dihasilkan. Hal ini telah dilakukan seperti pada contoh, sehingga dihasilkan hubungan keterkaitan antar konstanta-konstanta, pers.(2.3).

IV. KESIMPULAN

1. Teori Keteraturan merupakan suatu teori baru dalam bidang matematika dan merupakan salah satu ilmu dasar di dalam ilmu komputer.
2. Teori Keteraturan adalah teori yang penting baik dalam bidang matematika ataupun komputer, karena kemampuannya dalam memprediksi dengan mudah suatu fungsi bertingkat yang mempunyai sifat teratur dan saling berhubungan.
3. Teori Keteraturan membuka peluang bagi para matematikawan untuk ikut berpatisipasi dalam pengembangannya, karena selain teori ini masih baru, juga belum ditemukannya bukti secara analitik untuk teori tersebut.
4. Pola-pola keteraturan guna menentukan hubungan keterkaitan antar konstanta-konstanta penyusun suatu fungsi dapat berbeda-beda, tergantung bentuk fungsi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Anton,H. (1989). Calculus 3^{th}. John Willey & Sons

Abramowitz, Milton; Stegun, Irene Ann, eds. (1983) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards; Dover Publications. pp. 332, 773. ISBN 978-0-486-61272-0.

Arfken, George B.; Weber, Hans J. (2005). Mathematical Methods for Physicists. Elsevier Academic Press. ISBN 0-12-059876-0.

Bayin, S. S. (2006). Mathematical Methods in Science and Engineering. Wiley. ch. 2. ISBN 978-0-470-04142-0.

Belousov, S. L. (1962). Tables of Normalized Associated Legendre Polynomials. Mathematical Tables. **18**. Pergamon Press. ISBN 978-0-08-009723-7.

Courant, Richard; Hilbert, David *(1953). Methods of Mathematical Physics.* **1**. New York, NY: Interscience. ISBN 978-0-471-50447-4.

Dunster, T. M. (2010), "Legendre and Related Functions", in Olver, Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W. (eds.), NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, ISBN 978-0521192255, MR 2723248

El Attar, Refaat (2009). Legendre Polynomials and Functions. CreateSpace. ISBN 978-1-4414-9012-4.

Goenawan, St. Ivan. (2002). Deret Garis Bertingkat dalam Teori Keteraturan, Metris. Vol.3, No.3 Jakarta, Unika Atma Jaya, p.50-57.

Goenawan, St. Ivan. (2003). Deret Bertingkat Berderajat Satu dalam Teori Keteraturan, Metris. Vol.4, No.1 Jakarta, Unika Atma Jaya, p.50-56.

Jerome,E. (1983). .Intermediate Algebra for College Students. Pwr Publishers.